LEZIONE 40

venerdì 15 dicembre 2023 11:16

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI II ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

$$a y'' + b y' + c y = g(x).$$

Per risolverle:

1) Si trova la soluzione generale dell'eq. omogenea $a y'' + b y' + c y = 0$ che dipende dal polinomio caratteristico $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$:

- $\Delta > 0$: $y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ dove $p(\lambda_1) = p(\lambda_2) = 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$
- $\Delta = 0$: $y_0(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1 x} x$ dove $p(\lambda_1) = 0$.
- $\Delta < 0$: $y_0(x) = C_1 e^{ax} \cos(bx) + C_2 e^{ax} \operatorname{sen}(bx)$ dove $p(a \pm ib) = 0$

2) Si trova una soluzione particolare $\bar{y}$ dell'equazione completa con il metodo di similarità (cioè una soluzione "simile" a $g(x)$)

3) Conclusione: la soluzione generale dell'equazione completa è $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$.

ESERCIZIO 1

Determinare la sol. generale dell'eq. differenziale

$$y'' - y' - 2y = 2x - 3$$

1) Consideriamo l'eq. omogenea $y'' - y' - 2y = 0$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione omogenea è:

$$y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

2) Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione completa:

$$y'' - y' - 2y = \underbrace{2x - 3}_{g(x)}$$

Cerchiamo $\bar{y}(x) = Ax + B$.

$$\bar{y}'(x) = A$$
$$\bar{y}''(x) = 0$$

Sostituiamo nell'equazione: $\bar{y}$ è soluzione se:

$$0 - A - 2(Ax+B) = 2x - 3$$
$$-2Ax - A - 2B = 2x - 3$$

$$\begin{cases} -2A = 2 \\ -A - 2B = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ A + 2B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ 2B = 3 - A = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \end{cases}$$

Quindi $\bar{y}(x) = -x + 2$

Conclusione: la soluzione generale dell'eq. completa è:

$$y_0(x) + \bar{y}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - x + 2.$$

ESERCIZIO 2

Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:

$$y'' + 3y' + 4y = 2e^{3x}$$

1) Consideriamo l'eq. omogenea $y'' + 3y' + 4y = 0$

Polinomio caratteristico: $p(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 4$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2} = \underbrace{-\frac{3}{2}}_{a} \pm i \underbrace{\frac{\sqrt{7}}{2}}_{b}$$

La soluzione generale dell'eq. omogenea:

$$y_0(x) = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx)$$
$$= c_1 e^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right)$$

2) Cerchiamo una soluzione particolare:

$$y'' + 3y' + 4y = \underbrace{2e^{3x}}_{g(x) = 2e^{3x}}$$

$$\bar{y}(x) = A e^{3x}$$
$$\bar{y}'(x) = A e^{3x} \cdot 3 \quad = 3A e^{3x}$$
$$\bar{y}''(x) = \quad 9A e^{3x}$$

$$9A \cancel{e^{3x}} + \underline{3} \cdot 3A \cancel{e^{3x}} + 4 A \cancel{e^{3x}} = 2 \cancel{e^{3x}}$$

$$9A + 9A + 4A = 2$$
$$22A = 2$$
$$A = \frac{2}{22} = \frac{1}{11} \qquad \text{Quindi } \bar{y}(x) = \frac{1}{11} e^{3x}.$$

Conclusione:

La soluzione generale dell'eq. completa è:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + C_2 e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + \frac{1}{11} e^{3x}$$

ESERCIZIO 3

$$y'' + 3y' + 4y = 2e^{3x} + x$$

1) Come prima $y_0(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + c_2 e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right)$.

2) Soluzione particolare:

$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$ dove $\bar{y}_1$ risolve

$\bar{y}_1'' + 3\bar{y}_1' + 4\bar{y}_1 = 2e^{3x}$ (Nell'esercizio precedente: $\bar{y}_1 = \frac{1}{11} e^{3x}$)

e $\bar{y}_2$ risolve:

$$y_2'' + 3\bar{y}_2' + 4\bar{y}_2 = x$$

$\bar{y}_2(x) = Ax + B$

$\bar{y}_2'(x) = A$

$\bar{y}_2'(x) = 0$

$$0 + 3A + 4(Ax+B) = x$$
$$4Ax + 3A + 4B = x$$

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 3A + 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -\frac{3}{4}A = -\frac{3}{16} \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) = \frac{1}{11} e^{3x} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$$

La sol generale dell'eq. completa è:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + C_2 e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2} x\right) + \frac{1}{11} e^{3x} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}.$$

ESERCIZIO 4

a) Determinare la sol. generale dell'equazione $4y'' + 3y' - y = 7 - x$

b) Determinare la sol. del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 4y'' + 3y' - y = 7 - x \\ y(1) = 0 \ , \quad y'(1) = -2 \end{cases}$$

---

a) 1) Risolviamo l'eq. omogenea: $4y'' + 3y' - y = 0$

$$p(\lambda) = 4\lambda^2 + 3\lambda - 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8} \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -1 \end{cases}$$

Sol. generale dell'eq. omogenea è $y_0(x) = C_1 e^{\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-x}$

2) Cerchiamo una sol. particolare:

$$\bar{y}(x) = Ax + B \quad , \quad \bar{y}'(x) = A \quad , \quad \bar{y}''(x) = 0$$

$$0 + 3A - (Ax + B) = 7 - x$$

$$-Ax + 3A - B = 7 - x$$

$$\begin{cases} -A = -1 \\ 3A - B = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -4 \end{cases}$$

$$\bar{y}(x) = x - 4$$

La sol. generale dell'eq. completa è

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-x} + x - 4$$

b)
$$\begin{cases} 4y'' + 3y' - y = 7 - x \\ y(1) = 0 \ , \quad y'(1) = -2 \end{cases}$$

Sappiamo per la parte a) che $y(x) = C_1 e^{\frac{1}{4}x} + C_2 e^{-x} + x - 4$

$$y(1) = C_1 e^{\frac{1}{4}} + C_2 e^{-1} - 3$$

$$y'(x) = C_1 e^{\frac{1}{4}x} \frac{1}{4} - C_2 e^{-x} + 1$$

$$y'(1) = c_1 e^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} - c_2 e^{-1} + 1$$

Vogliamo che:

$$\begin{cases} c_1 e^{\frac{1}{4}} + c_2 e^{-1} - 3 = 0 \\ c_1 e^{\frac{1}{4}} \frac{1}{4} - c_2 e^{-1} + 1 = -2 \end{cases}$$

$$D_1 = c_1 e^{\frac{1}{4}}, \quad D_2 = c_2 e^{-1}$$

$$\begin{cases} D_1 + D_2 - 3 = 0 \\ \frac{1}{4} D_1 - D_2 + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} D_1 = 0 \\ D_2 = 3 \end{array}$$ (sommando le due equazioni)

$$\begin{cases} 0 = c_1 e^{\frac{1}{4}} \\ 3 = c_2 e^{-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 3e \end{cases}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = 3e \cdot e^{-x} + x - 4 = 3e^{1-x} + x - 4$$

ESERCIZIO 5

$$y'' - 9y = \overbrace{\cos(3x)}^{g(x)}$$

1) Eq omogenea $y'' - 9y = 0$ $\quad p(\lambda) = \lambda^2 - 9 \quad \lambda_{1,2} = \pm 3.$

$$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

2) $\bar{y}(x) = A\cos(3x) + B\sin(3x)$

$$\bar{y}'(x) = -A\sin(3x) \cdot 3 + 3B\cos(3x)$$

$$\bar{y}''(x) = -9A\cos(3x) - 9B\sin(3x)$$

Sostituisco nell'equazione:

$$-9A\cos(3x) - 9B\sin(3x) - 9\left(A\cos(3x) + B\sin(3x)\right) = \cos(3x)$$

$$-18A\cos(3x) - 18B\sin(3x) = \cos(3x)$$

$$\begin{cases} -18A = 1 \\ -18B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{18} \\ B = 0 \end{cases}$$

$\bar{y}(x) = -\frac{1}{18}\cos(3x)$.

Soluzione generale è $\bar{y}(x) = -\frac{1}{18}\cos(3x) + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$.

Se volessimo risolvere l'equazione $y'' - 9y = x\cos(3x) + e^{3x}$ dovremmo cercare $\bar{y}$ della forma

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x) \quad \text{con}$$

$$\bar{y}_1(x) = (Ax+B)\cos(3x) + (Cx+D)\sin(3x)$$

$$\bar{y}_2(x) = E e^{3x} x$$

Metodo di Variazione delle costanti per equazioni di II ordine.

- Se la soluzione generale dell'eq. omogenea è del tipo $y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, si cerca $\bar{y}(x)$ della forma $\bar{y}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$.

Si impone inoltre la condizione aggiuntiva

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0.$$

In questo modo, calcolando le derivate di $\bar{y}$ troviamo:

$$\bar{y}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

$$\bar{y}'(x) = \underline{c_1'(x) y_1(x)} + c_1(x) y_1'(x) + \underline{c_2'(x) y_2(x)} + c_2(x) y_2'(x)$$

$$= c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)$$

$$\bar{y}''(x) = c_1'(x) y_1'(x) + c_1(x) y_1''(x) + c_2'(x) y_2'(x) + c_2(x) y_2''(x)$$

Quando sostituiamo nell'equazione $a y'' + b y' + c y = g(x)$ troviamo:

$$a c_1'(x) y_1'(x) + a c_2'(x) y_2'(x) + c_1(x) \underbrace{(a y_1'' + b y_1' + c y_1)}_{=0} + c_2(x) \underbrace{(a y_2'' + b y_2' + c y_2)}_{=0} = g(x)$$

cioè $a c_1' y_1' + a c_2' y_2' = g(x)$

Quindi c_1' e c_2' soddisfano le condizioni

$$\begin{cases} a c_1' y_1' + a c_2' y_2' = g(x) \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo un sistema da cui ricaviamo c_1' e c_2':

$$\begin{cases} c_1' y_1' + c_2' y_2' = \frac{g(x)}{a} \\ c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \end{cases}$$

Una volta trovate c_1' e c_2', c_1 e c_2 si trovano integrando.

ESEMPIO

$$y'' - 9y = \cos(3x) \qquad y_1(x) = e^{3x} \quad , \quad y_2(x) = e^{-3x}$$

Cerchiamo $\bar{y}$ con il metodo di variazione delle costanti:

$$\bar{y}(x) = c_1(x)\, e^{3x} + c_2(x)\, e^{-3x}.$$

$$\begin{cases} c_1'\, 3e^{3x} + c_2' (-3e^{-3x}) = \frac{\cos(3x)}{1} \\ c_1'\, e^{3x} + c_2'\, e^{-3x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c_1' e^{3x} - 3c_2' e^{-3x} = \cos(3x) \\ c_1' e^{3x} + c_2' e^{-3x} = 0 \end{cases}$$

$$6 c_1' e^{3x} = \cos(3x) \quad \Rightarrow \quad c_1' = \frac{1}{6}\cos(3x)\, e^{-3x}$$

$$c_2' = -c_1' e^{6x} = -\frac{1}{6}\cos(3x)\, e^{3x}$$

$$c_1 = \int \frac{1}{6}\cos(3x)\, e^{-3x}\, dx = -\frac{1}{36} e^{-3x}\cos(3x) + \frac{1}{36} e^{-3x}\sin(3x) + K$$

$$c_2 = -\int \frac{1}{6}\cos(3x)\, e^{3x}\, dx = -\frac{1}{36} e^{3x}\cos(3x) - \frac{1}{36} e^{3x}\sin(3x) + K_2$$

$$\bar{y}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$$

$$= \left(-\frac{1}{36}\cos(3x) + \cancel{\frac{1}{36}\sin(3x)}\right) + \left(-\frac{1}{36}\cos(3x) - \cancel{\frac{1}{36}\sin(3x)}\right)$$

$$= -\frac{2}{36}\cos(3x) = -\frac{1}{18}\cos(3x).$$

Vantaggi:	Svantaggi:
• Il metodo si può applicare con qualsiasi g, purché si riescano a calcolare gli integrali.	• Quando si possono applicare entrambi i metodi, il metodo di somiglianza è più semplice.
• Con alcuni aggiustamenti il metodo si applica ad equazioni lineari con coefficienti non costanti	• Richiede il calcolo di integrali.

Equazioni lineari di ordine n a coefficienti costanti.

Sono equazioni del tipo:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Queste equazioni si possono risolvere con gli stessi metodi che abbiamo utilizzato per le equazioni di ordine 2:

1) Si risolve l'equazione omogenea $(g(x)=0)$ utilizzando il polinomio caratteristico:
   - Se λ è una radice del pol. caratteristico di molteplicità m:
     $e^{\lambda x}, \ e^{\lambda x} x, \ e^{\lambda x} x^2 \dots, \ e^{\lambda x} x^{m-1}$.
   - Se $\lambda = \alpha \pm i\beta$ è una radice complessa di molteplicità m, allora
     $e^{\alpha x}\cos(\beta x), \ e^{\alpha x}\sin(\beta x), \ e^{\alpha x}\cos(\beta x)\, x, \ e^{\alpha x}\sin(\beta x) \dots$
     $\dots, \ e^{\alpha x}\cos(\beta x)\, x^{m-1}, \ e^{\alpha x}\sin(\beta x)\, x^{m-1}$ sono soluzioni.

   Combinando queste soluzioni si ottiene la sol. generale dell'eq omogenea.
2) Si cerca una sol. particolare dell'eq. completa $\bar{y}$ con il metodo di somiglianza
3) Conclusione $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x)$.

ESEMPIO

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

Polinomio caratteristico: $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$.

$\lambda = 1$ è radice: $1 - 3 + 2 = 0$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$$(\lambda - 1)\underbrace{(\lambda^2 + \lambda - 2)}_{\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \ \to \ 1,\ -2}$$

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$$

$$y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{x} x + c_3 e^{-2x}$$

Altri metodi risolutivi per le equazioni differenziali

A volte è possibile risolvere equazioni differenziali utilizzando delle sostituzioni:

ESEMPIO:

$$y'' = e^{y'} \qquad (\text{Sostituzione } z = y')$$

$$z' = e^{z}$$

$$z' = e^{z} \cdot 1$$

$$z' e^{-z} = 1$$

$$\int e^{-z}\, dz = \int 1\, dx$$

$$-e^{-z} = x + C$$

$$e^{-z} = -x - C$$

$$-z = \log(-x - C)$$

$$z = -\log(-x - C)$$

Non sempre la sostituzione è facile da trovare:

ESEMPIO

$$y' + xy + y^2 = 0$$

In questo caso la sostituzione da usare è : $z = \frac{1}{y}$.

In questo modo: $z' = -\frac{y'}{y^2}$ quindi

$$y' + xy + y^2 = 0$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{x}{y} + 1 = 0$$

$$-z' + xz + 1 = 0$$

$z' = xz + 1$ eq. lineare di I ordine.